Δευτέρα 20/4 } 11 - 2 13/4/20
Τρίτη 21/4 }

Εκμηδενιστής Μόδιου (Annihulator)

Έστω R δακτύλιος και M R-μόδιος

<u>Ορισμός</u>: Το σύνολο $I_m = \{r \in R \quad r \cdot m = 0_M\}$
ονομάζεται εκμηδενιστής του στοιχείου $m \in M$

* $Ann_R(m)$ ιδεώδες του R *

i) Προφανώς $0_R \in Ann_R(m)$ καθώς $0_R \cdot m = 0_M$

ii) $x, y \in Ann_R(m)$ $\quad x \cdot m = 0_M, \; y \cdot m = 0_M$
$(x-y) \cdot m = xm - ym = 0_M$

iii) $r \in R$, $x \in Ann_R(m)$
ΔΣΟ $rx \in Ann_R(m)$ $\quad (rx)m = r(xm) = r \cdot 0_M = 0_M$
άρα ιδεώδες

<u>Γενικεύουμε</u>: Έστω $N \leq M$. Ορίζεται ο εκμηδενιστής του N $\; Ann_R(N) = \{r \in R \quad r \cdot n = 0_M \; \forall n \in N\}$

Άρα, ο $Ann_R(N)$ είναι ιδεώδες του R
↳ <u>άρα</u> ο $Ann_R(N) \leq M$ (το $N \leq M$)

<u>Πχ 1)</u> Έστω $V \neq \emptyset$ ένας K δ.χ.
$Ann_K(V) = \{x \in K : x \cdot v = 0_K, \; \forall v \in V\} = \{0_K\}$
$x \cdot v = 0_K \xrightarrow[\exists v^{-1}]{v \in V \subseteq K} (xv)v^{-1} = 0v^{-1}$
$\Rightarrow x = 0$

2) $Ann_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n$, $Ann_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}_n$

- $Ann_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = \{x \in \mathbb{Z} \ x \cdot \bar{y}_n = \bar{0}_n , \forall \bar{y}_n \in \mathbb{Z}_n\}$
  $= \{n \cdot k , \forall k \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$

- $Ann_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}_n = \{ \bar{x}_n \in \mathbb{Z}_n \ \bar{x}_n \bar{y}_n = \bar{0}_n , \forall \bar{y}_n \in \mathbb{Z}_n\}$
  $= \{\bar{0}_n\}$

<u>Πρόταση</u>: Έστω R δακτύλιος και M R-πρότυπο.
Ισχύουν:

1) $Ann_R(M) = \bigcap_{m \in M} Ann_R(m)$

* 2) Αν ο R μεταθετικός $\Rightarrow Ann_R(m) = Ann_R(\langle m \rangle)$

<u>Ορισμός</u>: Ένας R-πρότυπος M καλείται πιστός αν ο $Ann_R(M) = \{0_R\}$

* <u>Θεώρημα</u>: Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και M R-πρότυπο. Τότε:

M κυκλικό $\Leftrightarrow R/Ann_R(M) \simeq M$

Απόδειξη:

$(\Rightarrow)$ Έστω $M = \langle m \rangle$

Ορίζω $\varphi : R \to M$
$r \mapsto rm$, $\varphi(r) = rm)$

- φ ομομ.
- $\varphi(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2) m = r_1 m + r_2 m = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$
- Έστω $r \in R$, $r' \in R$
  $\Rightarrow \varphi(r \cdot r') = (rr')m = r(r'm) = r\varphi(r')$

Άρα $R/Ker\varphi \simeq Im\varphi$

$M = \langle m \rangle$

$\ker\varphi = \{ r \in R : \varphi(r) = 0_M \}$

$= \{ r \in R : rm = 0_M \}$

$= Ann_R(m)$ Καθώς R μεταθ.

$= Ann_R(\langle m \rangle) = Ann_R M$

Άρα $R/Ann_R M \simeq Im\varphi$

φ επί: Έστω $m \in M = rm'$ για κάποιο $m' \in M$

$\Rightarrow$ Παρατ. ότι $\exists$ $\varphi(r) = rm' = m$

ή $\forall rm \in M$, $\exists r \in R : \varphi(r) = rm$

$\Rightarrow \varphi$ επί $\Rightarrow Im\varphi = M$

Άρα $R/_{Ann_R M} \simeq M$

$(\Leftarrow)$ Έστω $R/Ann_R M \simeq M$ Θδο M κυκλικό

αρκεί νδο το $R/Ann_R M$ είναι κυκλικό

παρατ. ότι $\exists$ $(1_R + Ann_R M) \in R/Ann_R M$

έτσι ώστε $R/_{Ann_R M} = \langle 1_R + Ann_R M \rangle$

καθώς $\forall (r + Ann_R M) \in R/Ann_R M$

$r + Ann_R M = r(1_R + Ann_R M)$

$\Rightarrow$ ο R/Ann κυκλικός

$\Rightarrow R/Ann \simeq M \Rightarrow M$ κυκλικός

*Απόδειξη: R μεταθ $\Rightarrow Ann_R(m) = Ann_R(\langle m \rangle)$

Προφανώς, $Ann_R(\langle m \rangle) \subseteq Ann_R(m)$

καθώς αν $x \in Ann_R(\langle m \rangle) \Leftrightarrow x(\lambda m) = 0_M$ $\forall \lambda m \in \langle m \rangle$

$\forall \lambda$ άρα και για $\lambda = 1$

$x \cdot m = 0_M \Rightarrow x \in Ann_R(m)$

Αντίστροφα, Θδο $Ann_R(m) \subseteq Ann_R(\langle m \rangle)$

Έστω $x \in Ann_R(m) \Rightarrow xm = 0$
$\Rightarrow r(xm) = r\,0_M \Rightarrow r(xm) = 0_M$
$(rx)m = 0_M \xrightarrow{R\text{-μεταθ}} x(rm) = 0_M \quad \forall r \in R$
$= Ann_R(\langle m \rangle)$

Παρατήρηση: Αν ο R μη μεταθετικός
M κυκλικό $\Leftrightarrow R/I \simeq M$
$\rightarrow Ann_R(m)$

όπου I ο $Ann_R(m)$

Πρόταση: Έστω κυκλικά R-μόδια M, N, R μεταθ
$M \simeq N \Leftrightarrow Ann_R M = Ann_R N$

$(\Rightarrow)$ αν $M \simeq N \Rightarrow Ann_R M = Ann_R N$
$$M \simeq R/_{Ann_R M} = R/_{Ann_R N} \simeq N$$
$\Rightarrow M \simeq N$

Κατασκευή Μοδίων "Ευθύ Άθροισμα"

Έστω $M_1, \ldots, M_k$ R μόδια. Το σύνολο όλων των διατεταγμένων k-άδων ορίζεται ως το σύνολο
$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k = \{(m_1, \ldots, m_k) : m_i \in M_i \ \forall i = 1, \ldots, k\}$
και ορίζεται ως το ευθύ γινόμενο των $M_1, \ldots, M_k$
Εφοδιάζοντάς το με τις πράξεις:
"+" $(m_1, \ldots, m_k) + (m_1', \ldots, m_k') = (m_1 + m_1', \ldots, m_k + m_k')$
"·" $r(m_1, \ldots, m_k) = (rm_1, \ldots, rm_k) \ \forall r \in R, \ m_1, \ldots, m_k \in M_1 \times \ldots \times M_k$
$\Rightarrow$ το σύνολο $M_1 \times \ldots \times M_k$ λαμβάνει δομή R-μοδίου
(εξωτερικό ευθύ άθροισμα)

Πρόταση: Έστω $N_1, \dots, N_k \leq M$ όπου M R-μόδιο
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα
i) η απεικόνιση $\pi: N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k \to N_1 + \dots + N_k$
$$(n_1, n_2, \dots, n_k) \longmapsto n_1 + n_2 + \dots + n_k$$
είναι R-ισομορφισμός
ii) $N_j \cap (N_1 + \dots + N_{j-1} + N_{j+1} + \dots + N_k) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, k$
iii) $\forall x \in N_1 + \dots + N_k$ γράφονται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $n_1 + \dots + n_k$, $n_i \in N_i$

(*) Σε αυτή την περίπτωση το R-μόδιο $M = N_1 + \dots + N_k$ ορίζεται ως το ευθύ άθροισμα των $N_1, \dots, N_k$ και συμβολίζεται με
$$N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k.$$

Παρατήρηση:
1) αν $N_1, \dots, N_k \leq M$: $M = N_1 + \dots + N_k \Rightarrow$
$M = N_1 \oplus \dots \oplus N_k \iff \forall i \in \{1, \dots, k\}$
$$N_i \cap \sum_{j \neq i} N_j = 0$$
} μεθοδολογία απόδειξης ευθύ αθροίσματος.

* $M = N_1 \oplus N_2$, $N_1, N_2 \leq M$
i) $M = N_1 + N_2$, $N_1 \cap N_2 = 0$

2) Στην ουσία, η διαφορά μεταξύ του
$M = N_1 + \dots + N_k$ και του
$M = N_1 \oplus \dots \oplus N_k \leftarrow$ το τυχαίο στοιχείο έχει __μοναδική__ γραφή (αναπαράσταση)

Απόδειξη Πρότασης:
(i) $\Rightarrow$ (ii) $\pi: N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k \to N_1 + N_2 + \dots + N_k$ ισομορφισμός
Έστω τυχαίο $j \in \{1, \dots, k\}$ και έστω $a_j \in N_j \cap \sum_{i \neq j} N_i$
$a_j \in \sum_{i \neq j} N_i \iff a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_k$
και $a_j \in N_j$ $\iff a_1 + a_2 + \dots + (-a_j) + a_{j+1} + \dots + a_k = 0$

άρα $\pi(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, (-a_j), a_{j+1}, \dots, a_k) =$

$= a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} + (-a_j) + a_{j+1} + \dots + a_k = 0$

$\Rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, -a_j, \dots, a_k) \in Ker\,\pi \overset{\pi\ 1-1}{=} \{0_{N_1\times\dots\times N_k}\}$

$= (0_{N_1}, 0_{N_2}, \dots, 0_{N_j}, \dots, 0_{N_k}) \Rightarrow a_j = 0_{N_j} = 0_M$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω τυχαίο $x \in N_1 + \dots + N_k$ γράφεται με δύο τρόπους $x = a_1 + \dots + a_k = \beta_1 + \dots + \beta_k$, $a_i, \beta_i \in N_i$

$$\underbrace{a_j - \beta_j}_{\in N_j} = \underbrace{(\beta_1 - a_1) + (\beta_2 - a_2) + \dots + (\beta_{j-1} - a_{j-1}) + (\beta_{j+1} - a_{j+1}) + \dots + (\beta_k - a_k)}_{\in N_1 + N_2 + \dots + N_{j-1} + N_{j+1} + \dots + N_k = \sum_{i\neq j} N_i}$$

άρα $a_j - \beta_j \in N_j \cap \sum_{i \neq j} N_i = 0$

άρα $a_j - \beta_j = 0 \ \forall j$, $a_j = \beta_j \ \forall j = 1, \dots, k$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $\pi : N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k \to N_1 + \dots + N_k$

$\pi(n_1, n_2, \dots, n_k) = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Θδο π ισομορφισμός.

<u>ομομορφισμός</u>

- $\pi((a_1, \dots, a_k) + (\beta_1, \dots, \beta_k)) = \pi((a_1 + \beta_1, \dots, a_k + \beta_k))$
  $= (a_1 + \beta_1) + (a_2 + \beta_2) + \dots + (a_k + \beta_k)$
  $= (a_1 + \dots + a_k) + (\beta_1 + \dots + \beta_k)$
  $= \pi(a_1, \dots, a_k) + \pi(\beta_1, \dots, \beta_k)$.
- Επίσης $r \in R$, $(a_1, \dots, a_k) \in N_1 \times \dots \times N_k$
  $\pi(r(a_1, \dots, a_k)) = \pi(ra_1, \dots, ra_k) = ra_1 + \dots + ra_k$
  $= r(a_1 + \dots + a_k) = r\,\pi(a_1, \dots, a_k)$.

<u>π "1-1"</u> $\pi(a_1, \dots, a_k) = \pi(\beta_1, \dots, \beta_k)$

$\Rightarrow a_1 + \dots + a_k = \beta_1 + \dots + \beta_k$

και λόγω μοναδικότητας γραφής

$a_1 = \beta_1 \ \dots \ a_k = \beta_k \Rightarrow \pi$ "1-1"

π : επί $\pi : N_1 \times \ldots \times N_k \to N_1 + \ldots + N_k$

Έστω τυχαίο $x = n_1 + \ldots + n_k \in N_1 + \ldots + N_k$

Παρατ. ότι $\exists\, (n_1, \ldots, n_k) \in N_1 \times \ldots \times N_k$

με $\pi(n_1, \ldots, n_k) = n_1 + \ldots + n_k = x$

άρα π επί , π ισομορφισμός